第6講　2次関数のグラフと最大・最小

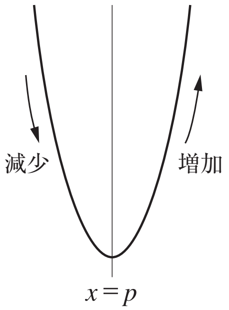
§1 ▶ 2次関数の最大・最小

要点整理 と 公式

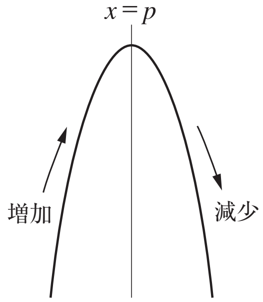
要点1　2次関数の増加と減少

2次関数　$y=a(x-p)^2+q$　の値の変化の特徴は以下である。

$a>0$のとき



$a<0$のとき



軸　$x=$______を境に
「　　　　」から「　　　　」へ

軸　$x=$______を境に
「　　　　」から「　　　　」へ

要点2　2次関数の最大値と最小値

「最大値」　…　関数のとる値のうち最大のもの。

「最小値」　…　関数のとる値のうち最小のもの。

最大値，最小値は，必ず存在するとは限らない。

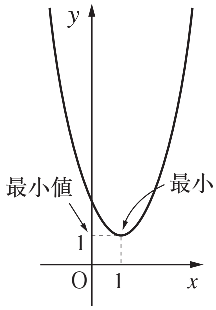
（ex）2次関数 $y=(x-1)^2+1$ について

この関数のグラフは右図のようになる。

よって，この関数は

$x=$______のとき最小値______をとる。

最大値は______。



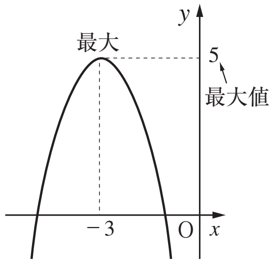
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 次関数　$y=ax^2+bx+c$　の最大値，最小値を求めるには，関数の式を「　　　　　　　」し，$y=a(x-p)^2+q$　の形にする。

（ex）2次関数　$y=-x^2-6x-4$　について

平方完成すると　$y=-(x+3)^2+5$　となる。

この関数のグラフは右図のようになる。



よって，この関数は

$x=$＿＿＿＿のとき 最大値＿＿＿をとる。

最小値は　＿＿＿＿。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=(x-2)^2+3$　　(2)　$y=-(x+3)^2-1$

(3)　$y=2x^2-12x+15$　　(4)　$y=-2x^2-4x+3$

Point Pickup

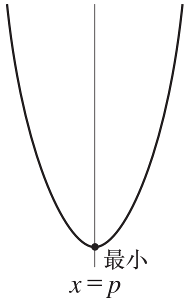
2次関数の最大・最小

⟹「　　　　」をかき，値の増減を調べる。

2次関数　$y=a(x-p)^2+q$　の最大と最小について

$a>0$ のとき

グラフは「　　　に凸」



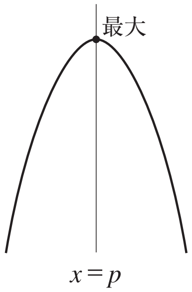
頂点で＿＿＿＿となる。

その値は＿＿＿＿の y 座標

最大値は＿＿＿＿

$a<0$ のとき

グラフは「　　　に凸」



頂点で＿＿＿＿となる。

その値は＿＿＿＿の y 座標

最小値は＿＿＿＿

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 定義域が限られた２次関数の最大・最小

要点整理 と 公式

要点3 値域

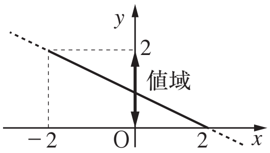
「値域」 … x が定義域全体を動くとき，y がとる値の範囲。

（ex）　$y=-\dfrac{1}{2}x+1$　（$-2\leqq x\leqq 2$）において

$x=-2$　のとき　$y=2$

$x=2$　のとき　$y=0$

よって値域は　$0\leqq y\leqq 2$



定義域が限られた関数のグラフをかくとき，

定義域内の部分を実線，定義域外の部分を点線(破線)でかくことが多い。

要点4 定義域が限られた2次関数の最大値と最小値

定義域が限られている場合の２次関数の最大・最小については，

定義域に対する値域を求め，その値域の中の最大値，最小値を求める。

（ex）2次関数　$y=x^2+1$　（$-2\leqq x\leqq 1$）について

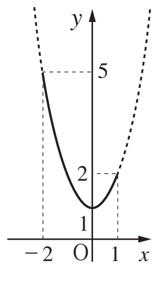
$x=-2$　のとき　$y=5$

$x=1$　のとき　$y=2$

よって　値域は　$1\leqq y\leqq 5$　であり

$x=$______で 最大値______をとり

$x=$______で 最小値______をとる。



※特に断りがない場合は，関数の定義域は，関数の値が定まるような実数全体とする。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛メモ｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2\ (-1\leqq x\leqq 3)$　　(2)　$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2\ (-2<x\leqq 1)$

(3)　$y=x^2-4x-2\ (0\leqq x\leqq 4)$　　(4)　$y=-x^2+6x-2\ (4\leqq x\leqq 5)$

Point Pickup

定義域が限られた2次関数の最大・最小

①　平方完成し，「　　　　　」を「　　　　」でかく。

②　与えられた定義域から「　　　　」を考える。

定義域内のグラフは「　　　　」にする。

定義域の端の点(端点)が含まれない場合は，点を「○」とする。

③　頂点と端点に注目し，最大値，最小値を求める。

頂点が最大値や最小値になるとは限らないことに注意。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 2次関数の決定

要点整理 と 公式

要点5　2次関数の式の決定

2次関数の式は

$y=ax^2+bx+c$　…①　　　　$y=a(x-p)^2+q$　…②

に大きく分けることができる。

①における a，b，c，②におけるa，p，q を，与えられた条件によって求めることで

2次関数を決定することができる。

例えば，通る点の座標が条件として与えられた場合，その座標を①または②に

「　　　　」することで，a，b，c や a，p，q に関する式が得られる。

（ex）①のグラフが 点(2，1) を通るとき

①の式にその座標の値を「　　　　」すると

という式が得られる。

要点6　頂点が与えられたときの2次関数の決定

頂点の座標や軸の方程式が条件として与えられたときは，それらを使って

$y=a(x-p)^2+q$

の形で表すことができる。

（ex）頂点が点(1，2)である放物線をグラフにもつ2次関数について

頂点が点(1，2)であることより，この2次関数は

と表すことができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

(1)　頂点が点(2,　5)で，点(1,　6)を通る。

(2)　軸の方程式が $x=-1$ で，2点(1,　−9)，(0,　−3)を通る。

(3)　3点(0,　5)，(1,　4)，(−1,　12)を通る。

Point Pickup

２次関数の決定（頂点・軸から）

頂点の座標が(p,　q)，軸の方程式が $x=p$ である２次関数の式は

と表される。

これに，通る点の座標の値を＿＿＿＿し，＿＿＿を求め，式を決定する。

※答えは $y=a(x-p)^2+q$ の形のままでよいが，$y=ax^2+bx+c$ の形にしてもよい。

２次関数の決定（通る3点から）

求める２次関数の式を＿＿＿＿＿＿＿＿とおき，通る点の座標を1つずつ代入する。

できた３つの方程式を「＿＿＿＿方程式」として解く。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

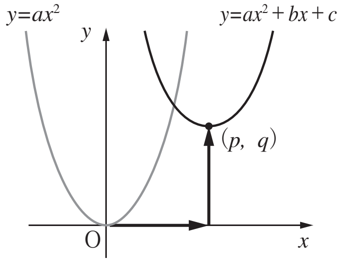
§4 放物線の平行移動

要点整理 と 公式

要点7 放物線の形状と平行移動

2次関数　$y=ax^2+bx+c$　のグラフを，「　　　　　　　」$y=ax^2+bx+c$　ということがある。

放物線　$y=ax^2+bx+c$　は，放物線 $y=ax^2$ を平行移動したものである。
その移動量は，移動後の「　　　　　」の座標を求めることで得られる。



同様に，$y=ax^2+b'x+c'$　は，放物線 $y=ax^2$ を平行移動したものである。

x^2の係数が同じ2つの放物線 $y=ax^2+bx+c$，$y=ax^2+b'x+c'$ は，いずれも放物線 $y=ax^2$ を平行移動したものである。

したがって，以下のことがいえる。

■ 放物線の平行移動

x^2の係数が同じ２つの放物線 $y=ax^2+bx+c$，$y=ax^2+b'x+c'$　は，
一方を平行移動すると，もう一方に重ねることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

(1) 放物線 $y=-x^2-8x-18$ は，どのように平行移動すると放物線 $y=-x^2+6x-12$ に重なるか。

(2) 放物線 $y=2x^2-4x+3$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

Point Pickup

x^2 の係数が同じ2つの放物線の平行移動

$\Longrightarrow$ ２つの放物線の頂点の座標をそれぞれ求める。

２つの頂点のx座標，y 座標の「　　　」がそれぞれ x 軸方向，y 軸方向の移動量である。

$y=2(x-1)^2-3$ …①，$y=2(x+1)^2+2$ …② について，

放物線①の頂点は点＿＿＿＿＿

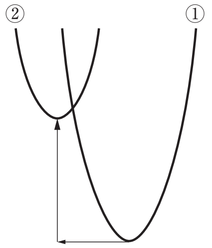
放物線②の頂点は点＿＿＿＿＿

よって，放物線①を

x 軸方向に＿＿＿＿＿

y 軸方向に＿＿＿＿＿

だけ平行移動すると，放物線②に重なる。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　確認テスト

1　次の2次関数に最大値，最小値があればそれを求めよ。ない場合は「0」と答えよ。

(1)　$y=(x-2)^2+3$　　最大値 [ア]　最小値 [イ]

(2)　$y=-2(x-1)^2+4$　　最大値 [ウ]　最小値 [エ]

2　次の2次関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=2x^2+1$　$(-2\leqq x\leqq 1)$　　最大値 [オ]　最小値 [カ]

(2)　$y=x^2-6x+2$　$(2\leqq x\leqq 5)$　　最大値 − [キ]　最小値 − [ク]

(3)　$y=-x^2+6x$　$(1\leqq x\leqq 2)$　　最大値 [ケ]　最小値 [コ]

3　次の条件を満たす放物線をグラフにもつ２次関数を求めよ。

(1)　頂点が点(1，3)で，点(3，−1)を通る。　　$y=$ [サ] $(x-$ [シ] $)^2+$ [ス]

(2)　3点(0，1)，(1，−1)，(2，3)を通る。　　$y=$ [セ] x^2- [ソ] $x+$ [タ]

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　2次関数のグラフと最大・最小

1

(1)　$x=2$ のとき最小値 3，最大値はない。

(2)　$x=-3$ のとき最大値 -1，最小値はない。

(3)　$y=2x^2-12x+15=2(x-3)^2-3$

よって　$x=3$ のとき最小値 -3，最大値はない。

(4)　$y=-2x^2-4x+3=-2(x+1)^2+5$

よって　$x=-1$ のとき最大値 5，最小値はない。

2

(1)　$x=3$　で最大値 9，$x=0$ で最小値 0

(2)　$x=0$　で最大値 2，最小値はない。

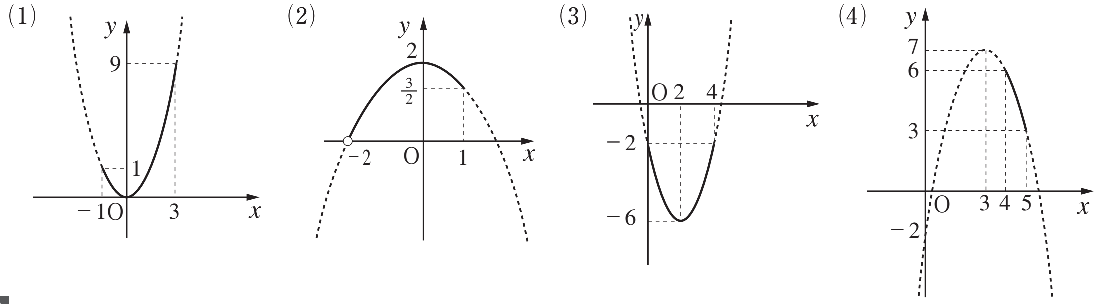
(3)　$y=x^2-4x-2=(x-2)^2-6$ より　頂点は$(2,\ -6)$

よって　$x=0,\ 4$ で最大値 -2，$x=2$ で最小値 -6

(4)　$y=-x^2+6x-2=-(x-3)^2+7$　より　頂点は$(3,\ 7)$

よって　$x=4$ で最大値 6，$x=5$ で最小値 3

(参考図)



3

(1)　頂点が点$(2,\ 5)$であることより，求める2次関数は

$y=a(x-2)^2+5$

と表される。このグラフが点$(1,\ 6)$を通るので

$6=a(1-2)^2+5$　　$a=1$

よって　$y=(x-2)^2+5$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　軸の方程式が $x=-1$ であることより，求める2次関数は

$y=a(x+1)^2+q$

と表される。このグラフが2点$(1,\ -9)$，$(0,\ -3)$を通るので

$-9=4a+q,\ -3=a+q$

これを解いて　$a=-2,\ q=-1$

よって　$y=-2(x+1)^2-1$

(3)　求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$　とおく。

このグラフが3点$(0,\ 5)$，$(1,\ 4)$，$(-1,\ 12)$を通るので

$$\begin{cases} 5=c & \cdots① \\ 4=a+b+c & \cdots② \\ 12=a-b+c & \cdots③ \end{cases}$$

②，③に①を代入して整理すると

$a+b=-1,\ a-b=7$

これを解いて　$a=3,\ b=-4$

よって　$y=3x^2-4x+5$

4

(1)　$y=-x^2-8x-18=-(x+4)^2-2$　より，頂点は点$(-4,\ -2)$

$y=-x^2+6x-12=-(x-3)^2-3$　より，頂点は点$(3,\ -3)$

よって，$y=-x^2-8x-18$ を x 軸方向に7，y 軸方向に-1平行移動すると，

$y=-x^2+6x-12$ に重なる。

(2)　$y=2x^2-4x+3=2(x-1)^2+1$　より，頂点は点$(1,\ 1)$

この放物線を x 軸方向に -2，y軸方向に 3 だけ平行移動すると，頂点は点$(-1,\ 4)$へ移動する。

よって　求める放物線の方程式は　$y=2(x+1)^2+4$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講 確認テスト

1 次の2次関数に最大値，最小値があればそれを求めよ。ない場合は「0」と答えよ。

(1) $y=(x-2)^2+3$　　最大値 [ア]　　最小値 [イ]

(2) $y=-2(x-1)^2+4$　　最大値 [ウ]　　最小値 [エ]

2 次の2次関数の最大値，最小値を求めよ。

(1) $y=2x^2+1$　$(-2 \leqq x \leqq 1)$　　最大値 [オ]　　最小値 [カ]

(2) $y=x^2-6x+2$　$(2 \leqq x \leqq 5)$　　最大値 − [キ]　　最小値 − [ク]

(3) $y=-x^2+6x$　$(1 \leqq x \leqq 2)$　　最大値 [ケ]　　最小値 [コ]

3 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ２次関数を求めよ。

(1) 頂点が点(1，3)で，点(3，−1)を通る。　　$y=$ [サ] $(x-$ [シ] $)^2+$ [ス]

(2) 3点(0，1)，(1，−1)，(2，3)を通る。　　$y=$ [セ] x^2- [ソ] $x+$ [タ]

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

1 (1)　ア　0　　イ　3

(2)　ウ　4　　エ　0

2 (1)　オ　9　　カ　1

(2)　キ　3　　ク　7

(3)　ケ　8　　コ　5

3 (1)　サ　−　　シ　1　　ス　3

(2)　セ　3　　ソ　5　　タ　1

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。